平成21年度入学試験問題

数　　学

Ⅰ　注　意　事　項

1. 指示があるまで，この冊子の中を見てはいけません。
2. 設問はⅠからⅣまであります。
3. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。

　① 氏名欄……………………氏名を記入しなさい。

　② 受験番号欄………………受験番号（6桁の数字）を記入し，受験番号をマーク欄に必ずマークしなさい。

4. マークにはＨＢの鉛筆を使用し，次の例のように，濃く正しくマークしなさい。

良い例……… 

悪い例……… 

5. 正確にマークされていない場合，採点できないことがあります。
6. 答えを修正する場合は必ず「プラスチック製消しゴム」で完全に消し，消しくずを解答用紙上に残してはいけません。
7. 中途退場は認めません。
8. 試験中に質問がある場合は，手をあげて申し出なさい。
9. この冊子の余白を計算に用いてかまいません。
10. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

Ⅱ 解答上の注意

1 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（0～9）、または負の符号（－）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\text{アイ}}$ に－8と答えたいとき

ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

2 分数形で解答する場合は、既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。負の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$, $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$, $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2}$ と答えるところを、$1\sqrt{8}$, $\dfrac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

Ⅰ $\boxed{\text{ス}}$ の解答は解答群から最も適当なものを1つ選べ。

四面体OABCにおいて，

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}$$

が成り立つ．

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{a}$ とする．$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{a}>0$ を満たす $\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OB}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OC}$$

となる．

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ で表される点をDとする．$\angle ODC=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，Dから直線OCに下ろした垂線の足をEとすると，$DE=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ となる．

点Oから3点ABCを含む平面に下ろした垂線の足をF，OFとDEの交点をGとすると，Fは線分OGを $\boxed{\text{サ}}$: $\boxed{\text{シ}}$ に $\boxed{\text{ス}}$ する．

辺AB上に点P，辺BC上に点Q，辺OC上に点Rを取るとき，OP＋PQ＋QR＋RAの最小値は $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ となる．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

① 内　分　　② 外　分

Ⅱ (1) 袋の中に異なる5色の玉が1つずつ入っている．この袋から玉を1つ取り出し，色を調べて袋に戻すという操作を5回繰り返す．

取り出した玉の色が1種類である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウエ}}}$ である．

取り出した玉の色が2種類である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ である．

取り出した玉の色が3種類以下である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である．

(2) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると $14x+7$ 余り，$(x+1)(x-3)$ で割ると $32x+33$ 余る．$P(x)$ を $(x+1)(x+2)$ で割ると余りは $\boxed{\text{タチ}}\,x+\boxed{\text{ツテ}}$ となる．$P(x)$ が3次式だとすると，$P(x)=\boxed{\text{ト}}\,x^3+\boxed{\text{ナ}}\,x^2+\boxed{\text{ニ}}\,x+\boxed{\text{ヌ}}$ である．

Ⅲ　初項 $a_1=3$ と漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{-2a_n+5}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列の一般項を，以下の要領で求めてみよう．

$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，$p_1=3$，$q_1=1$ を満たす数列を $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ とする．列ベクトル $\vec{b}_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{b}_{n+1}=A\vec{b}_n$$

が成り立つような行列 A を求めると，$A=\begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & -\boxed{\text{イ}} \\ -2 & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$ と取ることができる．

これより

$$\vec{b}_n=A^{n-1}\vec{b}_1 \quad \cdots\cdots ①$$

が導かれる．

行列 A は $P=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}P^{-1}$$

と表される．ここで，

$$P^{-1}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{クケ}} & \boxed{\text{コ}} \end{pmatrix}$$

である．これより A^{n-1} を求めると，

$$A^{n-1}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\begin{pmatrix} \boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}^{\,n-1} & \boxed{\text{ソ}}-2\cdot\boxed{\text{タ}}^{\,n-1} \\ \boxed{\text{チ}}-\boxed{\text{ツ}}^{\,n-1} & \boxed{\text{テ}}+2\cdot\boxed{\text{ト}}^{\,n-1} \end{pmatrix}$$

これを式①に代入し，p_n と q_n の比を取って一般項 a_n を求めると

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ナ}}+\boxed{\text{ニ}}^{\,n-1}}{\boxed{\text{ヌ}}-\boxed{\text{ネ}}^{\,n-1}}$$

となる．

◇M3(065—44)

Ⅳ (1) (a) 初項4，公差$\frac{5}{N}$の等差数列を$\{a_k\}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)とすると

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a_k^{\frac{3}{2}}=\frac{\boxed{アイウ}}{\boxed{エオ}}$$

である．

(b) 初項0，公差$\frac{3}{N}$の等差数列を$\{b_k\}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)とすると

$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}b_k^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}=\boxed{カ}\,e^{\boxed{キク}}$$

である．

(2) $\boxed{ケ}$，$\boxed{サ}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{ツ}$ の解答はそれぞれ該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ。

つねに

$$\cos 2x \geqq 1-2x^2 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つことを証明したい．

$$f(x)=\cos 2x+2x^2-1$$

とおくと，導関数$f'(x)$は

$$f'(x)=\boxed{ケ}+\boxed{コ}\,x$$

となり，第2次導関数$f''(x)$は

$$f''(x)=\boxed{サ}+\boxed{シ}$$

となる．$f'(0)=\boxed{ス}$であり，つねに$f''(x)\ \boxed{セ}\ \boxed{ソ}$なので，$f(x)$は$x=0$で$\boxed{タ}$である．また，$f(0)=\boxed{チ}$なので，つねに$f(x)\ \boxed{ツ}\ \boxed{テ}$となって式①が証明される．

$\boxed{ケ}$，$\boxed{サ}$ の解答群

① $-4\sin 2x$　② $-4\cos 2x$　③ $-2\sin 2x$　④ $-2\cos 2x$
⑤ $2\sin 2x$　⑥ $2\cos 2x$　⑦ $4\sin 2x$　⑧ $4\cos 2x$

$\boxed{セ}$，$\boxed{ツ}$ の解答群

① $>$　② $<$　③ $\leqq$　④ $\geqq$　⑤ $=$

$\boxed{タ}$ の解答群

① 極大または極小　② 極大または最大　③ 極小または最小
④ 極大かつ最大　⑤ 極小かつ最小