数　　学

平成20年度

入学試験問題

受験番号	

1. 注意事項

（1） 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

（2） この問題冊子は，16ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて，監督者に知らせなさい。

（3） 解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄，および，受験番号のマーク欄があるので，それぞれ，正しく記入し，マークしなさい。

（4） 問題冊子のどのページも，切り離してはいけません。

（5） 計算機能をもった時計や計算器具などを使用してはいけません。使用した場合は，不正行為とみなします。

（6） 試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して，必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

（1） 問題は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の3問あります。

（2） 問題の文中の $\boxed{ア}$，$\boxed{イウ}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（＋，－）が入ります。これらを，つぎの方法で，解答用紙の指定欄に，解答しなさい。

裏表紙につづく

◇M2(194—12)

解答を始めるまえに，つぎの解答上の注意のつづきを読みなさい。

解答上の注意のつづき

（i） 分数の形の解答枠に，整数の解答をしたいときは，分母が 1 の分数の形になるように答えなさい。たとえば，$\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，$\dfrac{2}{1}$ と答えなさい。

（ii） 解答枠 $\boxed{}$ に，解答枠の けた数 より少ない けた数 の整数を解答したいときは，数字が右づめで，その前を 0 でうめるような形で答えなさい。たとえば，$\boxed{ヨワ}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，0 2 と答えなさい。ヨの 0 をマークしないままにしておくと，間違いになります！

（解答上の注意終）

1 座標平面上に4個の点 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1) をとり，点 A_0, B_0, C_0, D_0 を

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad C_0 = C, \quad D_0 = D$$

とする。

自然数 n に対して，点 A_n, B_n, C_n, D_n を次のように定める。

A_n は線分 $A_{n-1}B_{n-1}$ を 1 : 3 に内分する。

B_n は線分 $B_{n-1}C_{n-1}$ を 1 : 3 に内分する。

C_n は線分 $C_{n-1}D_{n-1}$ を 1 : 3 に内分する。

D_n は線分 $D_{n-1}A_{n-1}$ を 1 : 3 に内分する。

このとき，4点 A_n, B_n, C_n, D_n を頂点とする正方形の面積を S_n とし，線分 $A_{n-1}A_n$ の長さを l_n とする。

（1） $l_1 = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$S_1 = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。また，

$$l_2 = \frac{1}{\boxed{オカ}}\sqrt{10}, \qquad S_2 = \frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$$

である。

(2) S_n を n を用いて表すと，$S_n = \left(\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\right)^n$ であり，l_n を n を用いて表すと，$l_n = \left(\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)^n (\sqrt{10})^{n-1}$ である。

(3) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。$S_n < \dfrac{1}{10000}$ となる最小の自然数 n は $\boxed{ソタ}$ である。また，$l_n < \dfrac{1}{10000}$ となる最小の自然数 n は $\boxed{チツ}$ である。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}} + \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\sqrt{10}$ である。

2 四面体 OABC において，

$$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ, \qquad \angle BOC = 45^\circ$$

$$OA = OB = \sqrt{2}, \qquad OC = 1$$

とする。△ABC において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を T とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。辺 BC，CA の中点を，それぞれ，M，N とする。また，3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \qquad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とおく。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値は

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{ア}}$，　$\vec{b}\cdot\vec{c} = \boxed{\text{イ}}$，　$\vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{\text{ウ}}$

である。

(2) $|\overrightarrow{AB}|^2 = \boxed{\text{エ}}$，　$|\overrightarrow{BC}|^2 = \boxed{\text{オ}}$，　$|\overrightarrow{CA}|^2 = \boxed{\text{カ}}$ である。

また，△ABC の面積を S とすると，

$$S^2 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(3) 四面体 OABC の頂点 O から，3点 A，B，C を含む平面に垂線を下ろし，その平面との交点を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}$$

となり，

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。これより，四面体 OABC の体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

(4) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{NT}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} \boxed{\text{チ}} \vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{MT} = \left(1 \boxed{\text{ツ}} t\right)\vec{a} + \left(t \boxed{\text{テ}} \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NT} = \left(\frac{1}{2} \boxed{\text{ト}} t\right)\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。ここで，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ は符号 +，− のいずれかである。

(5) 内積 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NT}$, $\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TN}$ を t を用いて表すと

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MT} = -\boxed{\text{ナ}}\,t + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NT} = \boxed{\text{ネ}}\,t - \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

$$\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TN} = \boxed{\text{ヒ}}\,t^2 - \boxed{\text{フ}}\,t + \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である。

(6) 点 T が辺 AB 上を動くとき，△MNT が直角三角形となる t の値は全部で $\boxed{\text{マ}}$ 個あり，そのうち，最も小さい値は $\dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ で，最も大きい値は $\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$ である。

3 $\log x$ は自然対数とし，その底を e とする。関数

$$f(x) = (\log x)^3 - 2(\log x)^2$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1) 関数 $f(x)$ は $x = a$ で極大値 p，$x = b$ で極小値 q をとっている。このとき，

$$\log a = \boxed{\text{ア}}, \qquad p = \boxed{\text{イ}}$$

$$\log b = \boxed{\text{ウ}}\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \qquad q = \boxed{\text{カ}}\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ は符号 $+$，$-$ のいずれかである。

方程式 $f(x) = q$ の解のうち，b 以外の解を c とする。このとき，

$$\log c = \boxed{\text{サ}}\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{サ}}$ は符号 $+$，$-$ のいずれかである。

(2) 方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数は

$k = 1$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 個，

$k = 0$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 個，

$k = -1$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 個，

$k = -2$ のとき $\boxed{\text{チ}}$ 個

である。

(3) 曲線 C 上の2個の変曲点のうち，第1象限にある点の x 座標を d とする。このとき，

$$\log d = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{13}$$

である。

（4） 曲線 C の接線のうち，原点を通り，傾きが正である直線の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ニヌ}}\, e^{-\boxed{\text{ネ}}} \right) x$$

である。

（5） 不定積分について

$$\int \log x\, dx = x \left(\log x - \boxed{\text{ノ}} \right) + C_0$$

$$\int (\log x)^2 dx = x \left((\log x)^2 - \boxed{\text{ハ}} \log x + \boxed{\text{ヒ}} \right) + C_0$$

$$\int (\log x)^3 dx = x \left((\log x)^3 - \boxed{\text{フ}} (\log x)^2 + \boxed{\text{ヘ}} \log x - \boxed{\text{ホ}} \right) + C_0$$

である。ただし，C_0 は積分定数である。

（6） x 軸と曲線 C とで囲まれた部分の面積は

$$\boxed{\text{マ}}\, e^2 \boxed{\text{ミ}}\, \boxed{\text{ムメ}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{ミ}}$ は符号 ＋，－ のいずれかである。