近畿大学 一般(後期)
数学

メルリックス学院 持出厳禁

I (1) $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とするとき,

$\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \boxed{アイ}$, $\alpha^2 - \dfrac{1}{\alpha^2} = \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$, $\alpha^3 - \dfrac{1}{\alpha^3} = \boxed{オカ}$

である。

(2) k を定数とする。x, y についての連立方程式

$$\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = k \\ 2^{x+2} + 3^y = 5 \end{cases}$$

を考える。$x = -1$ のとき,$k = \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ である。また,この連立方程式が実数解 x, y をもつとき,k のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}} < k < \boxed{シス}$ である。

(3) 正の整数 $a,\ b,\ c$ が等式

$$(a+bi)(c-i) = 50$$

を満たすとする。ただし,i は虚数単位である。このとき,$a - bc = \boxed{セ}$ である。また,$a+b+c$ の最大値は $\boxed{ソタ}$ であり,最小値は $\boxed{チツ}$ である。

(4) 自然数 m, n に対して,x についての 2 次方程式

$$x^2 - mx - n = 0$$

が $x = 1+\sqrt{3}$ を解にもつとき,$m = \boxed{テ}$, $n = \boxed{ト}$ である。また,自然数 p, q に対して,x についての 3 次方程式

$$x^3 - px^2 + qx + 10 = 0$$

が $x = 1+\sqrt{3}$ を解にもつとき,$p = \boxed{ナ}$, $q = \boxed{ニ}$ である。

II　四面体 OABC の 3 辺 OC, AC, BC を切って開いたときの展開図を座標平面上で考える。3 点 O, A, B は，それぞれ $O(0,0)$, $A\left(4\sqrt{6}, 0\right)$, $B\left(0, 4\sqrt{6}\right)$ に置かれ，展開する前に C であった点は，3 点 $D\left(-3\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$, $E(p, -q)$, $F(r, s)$ に置かれたとする。ただし，$q > 0$, $r + s > 4\sqrt{6}$ とする。四面体 OABC の 4 つの面 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$, $\triangle ABC$ は，座標平面上でそれぞれ $\triangle OAB$, $\triangle OAE$, $\triangle OBD$, $\triangle ABF$ になったとする。このような条件を満たす四面体 OABC のうち，体積が最大となるものを考える。また，四面体 OABC において辺 OB 上に $OB \perp CH$ となる点 H をとり，辺 AB を $1:3$ に内分する点を P とする。

(1)　$OE = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $BF = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　$\angle CHP = \alpha$ (ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$) とするとき，$\alpha = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。また，C から平面 OAB に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり，四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(3)　$AC = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ であり，$\angle ACB = \beta$ (ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$) とするとき，$\beta = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi$ である。

(4)　$q = \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$,　$s = \dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}} + \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

III　O を原点とする座標平面において，$y = x^2 - 1$ のグラフ C と点 A$(-1, 0)$ を考える。A を通り，傾きが $\tan 15°$ である直線を ℓ とし，C と ℓ の交点のうち A と異なるものを B，さらに C と ℓ で囲まれた部分を D とする。

(1)　A を通り，C とただ 1 つの共有点をもつ直線の方程式は

$$x = \boxed{\text{アイ}} \quad \text{または} \quad y = \boxed{\text{ウエ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$$

である。

(2)　ℓ の y 切片は $\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3)　B の x 座標は $\boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4)　D の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサシ}} - \boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(5)　条件

「D の境界線上の任意の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq -|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ 」

を満たす D 内の点 Q 全体の集合が表す図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\pi$$

である。