数　学（前　期）

〔1〕 $a_n = \sum_{k=1}^{n} k\,2^{n-k}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。

(1) 和 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次のように4個ずつの群に分ける：

$$|a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4|a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8|\ \cdots\cdots$$

このとき，各群の2つ目の項以外の3数は，5で割ったときの余りが等しいことを示せ。

〔2〕 平面上の三角形ABCは二等辺三角形でないと仮定する。3つの内角∠A，∠B，∠Cの対辺の長さをそれぞれ a，b，c とする。三角形ABCの外接円を F，外心をOとする。点Aにおける F の接線と直線BCの交点をSとする。同様に点Bにおける F の接線と直線CAの交点をT，点Cにおける F の接線と直線ABの交点をUとする。

(1) △SABと△SCAは相似であることを示し，2つの三角形の面積の比を a，b，c を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OS} = \dfrac{c^2\overrightarrow{OC} - b^2\overrightarrow{OB}}{c^2 - b^2}$ を示せ。

(3) $x\overrightarrow{OS} + y\overrightarrow{OT} + z\overrightarrow{OU} = \vec{0}$ を満たす0でない実数 x，y，z の1組を a，b，c を用いて表せ。

(4) (3)で求めた x，y，z は $x + y + z = 0$ を満たすことを示して，S，T，Uは一直線上にあることを示せ。

〔3〕 円周 $x^2 + y^2 = 1$ の $x > 0$，$y > 0$ の部分にある弧を C とする。C 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における C の接線を L_θ とおく。また，実数 a に対して曲線 $y = (x - a)^2 - \dfrac{1}{4}$ を P_a と表す。

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である θ に対して，L_θ が P_a に接するような a が定まることを示し，a を θ で表せ。

(2) (1) の a を表す θ の関数のグラフの概形を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で描け。

(3) P_a と接する $L_\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

〔4〕 a，b を正の定数として，平面上の楕円 $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を E とする。

(1) E が直線 $y = x$ と接するとき b を a で表せ。また接点の x 座標 x_0 を求めよ。

(2) E が(1)の条件を満たすとき，$x \leqq x_0$ を満たす E の部分と2直線 $y = x$，$y = 0$ とで囲まれる図形を，x 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

〔5〕 はじめに袋の中に赤玉と青玉が2個ずつ入っている。次の試行を n 回行う。

袋の中をよくかき混ぜてから玉を1個取り出す。その色が赤なら手元において，青なら袋に戻す。

$n \geqq 1$ として，n 回の試行の後に手元に残る赤玉の個数が2，1，0個である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする。

(1) p_2，q_2，r_2 を求めよ。

(2) p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(3) $n \geqq 2$ として，p_n，q_n，r_n のそれぞれを p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(4) r_n を n を用いて表せ。

(5) p_n，q_n を n を用いて表せ。