平成26年度入学試験問題（前期）

数　学

注　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔1〕 数列$\{x_n\}$を次のように定める。

$$x_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}+1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) 数列$\{x_n\}$は減少数列であることを示せ。

(2) $x_n=\tan\theta_n$によりθ_n $\left(0<\theta_n<\frac{\pi}{2}\right)$を定める。数列$\{\theta_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}2^n x_n$を求めよ。

〔2〕

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$の因数分解を利用して，正の数x，y，zに対して不等式$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$を示せ。

(2) 正の数a，b，cは関係式$abc=a+b+c+2$をみたしながら変化する。積abcの最小値を求めよ。

〔3〕 a，b $(a>b)$を正の定数として，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$を楕円$C$の方程式とする。

(1) C上の点$\mathrm{P}(u,\ v)$におけるCの接線の方程式を求めよ。

(2) この楕円の2つの焦点$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$から(1)の接線に下ろした垂線2本の長さの積は，接点Pのとり方によらず一定であることを示し，積の値を求めよ。

〔4〕

(1) 多項式$f(x)$に関数$F(x)$を$F(x)=\int_0^1 f(x-t)\,dt$のように対応させる。このとき，$F(x)=kf(x)$となる実数kと3次多項式$f(x)$は存在しないことを示せ。

(2) A，Bを$(A,\ B)\neq(0,\ 0)$である定数として，$f(x)=A\cos x+B\sin x$，$g(x)=A\cos x-B\sin x$とおく。$f(x)$に関数$F(x)$を$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-t)\,dt$のように対応させる。$A$，$B$がある関係式をみたすとき，ある実数$k$により$F(x)=kg(x)$となることを示し，$A$，$B$のみたす関係式と$k$の値を求めよ。

〔5〕 1，2，…，nの番号をつけたn枚のカードが2組ある。合計$2n$枚のカードを箱に入れてよくかき混ぜて1枚ずつ順番にすべてのカードを取り出す。$1\leqq i\leqq n$として，i番目に取り出したカードの番号をa_iとし，また，$n+i$番目に取り出したカードの番号をb_iとする。

(1) $n=2$のとき，どのiに対しても$a_i\neq b_i$である確率を求めよ。

(2) $n=3$のとき，どのiに対しても$a_i\neq b_i$である確率を求めよ。

(3) $n=4$のとき，どのiに対しても$a_i\neq b_i$である確率を求めよ。