

大阪医科大学

平成 25 年 度 入 学 試 験 問 題 (前 期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1] $\triangle ABC$ において、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ として、頂点A, B, Cから対辺、またはその延長に下した垂線の長さをそれぞれ h_a , h_b , h_c とする。いま、 $\triangle ABC$ 内の一点Pから、辺BC, CA, AB, またはその延長に下した垂線の長さをそれぞれ x_a , x_b , x_c とする。点Oを平面上の定点とする。

- (1) $ah_a = bh_b = ch_c$ を示せ。
- (2) $\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c}$ は、点Pの位置によらず一定であることを示せ。
- (3) 点Pを通りBCに平行な直線をひき、辺ABとの交点をDとする。 \overrightarrow{OD} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , h_a , x_a で表せ。
- (4) $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$, $k + l + m = 1$ となる k , l , m を x_a , x_b , x_c , h_a , h_b , h_c で表せ。

[2] 正の数 c は $c^2 = c + 1$ をみたすとする。 n は自然数とする。

- (1) c は無理数であることを示せ。
- (2) $c^n = a_n c + b_n$ をみたす整数の組 (a_n, b_n) が存在することを示せ。
- (3) 2組の整数の組 (a_n, b_n) , (a'_n, b'_n) に対して、 $c^n = a_n c + b_n$, $c^n = a'_n c + b'_n$ が成り立つならば、 $a_n = a'_n$, $b_n = b'_n$ であることを示せ。
- (4) m を自然数とする。(2), (3) で一通りに定められた整数 a_n , a_{mn} に対して、 a_{mn} は a_n の倍数であることを示せ。

[3] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) 不等式 $\frac{-\theta^2}{2} \frac{1}{\cos \theta} < \log \cos \theta < \frac{-\theta^2}{2}$ を示せ。
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right)^n$ を調べよ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right)^{n^2}$ を調べよ。

[4]

- (1) 2つの異なる自然数 m , n に対して、 $\int_{-1}^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx$ を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して、 $\int_{-1}^1 \sin^2 n\pi x dx$ を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して、 $\int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx$ を求めよ。
- (4) N を自然数とし、 $c_n (1 \leq n \leq N)$ を実数として、 $f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\pi x$ とおく。 $c_n (1 \leq n \leq N)$ を変化させるとき、 $\int_{-1}^1 (x - f(x))^2 dx$ が最小になる $c_n (1 \leq n \leq N)$ の値を求めよ。

[5] 9本のくじがあり、当たりは3本、はずれは6本である。1本ずつくじを引く。引いたくじはもとに戻さないとする。4本のくじを引いた時点で、そのうちの当たりの数を X とする。また、自然数 $k (1 \leq k \leq 9)$ に対して確率変数 Y_k を、丁度 k 回目に引いたくじが当たりならば $Y_k = 1$, はずれならば $Y_k = 0$ と定める。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) 起こり得る列 (Y_1, \dots, Y_9) の総数を求めよ。
- (3) k をひとつ固定するとき、 $Y_k = 1$ である確率を求めよ。
- (4) X の期待値を求めよ。