

後期

数学問題

注意 1: , のように枠の中に入った数字はマークシート中の解答番号を表す。各枠には数字0～9のいずれかが当てはまるので、該当する数字を解答欄にマークすること。例えば問題中に とあり、38と答えたいとき、解答番号1に3、解答番号2に8をマークすること。

注意 2: 分数形で解答する場合は既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。

注意 3: 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。 $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{62}}{4}$ のように答えてはいけません。

以下の各間に答えなさい。

問 1 $x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x + 1$ を $x^2 - 2x + 2$ で割った商は $x^3 - \boxed{1}x^2 + \boxed{2}x + \boxed{3}$, 余りは $\boxed{4}x - \boxed{5}$ である。

問 2 71^{100} は 186 枠の整数である。 71^{∞} は 枠の整数である。

(問題 は次ページに続く)

問 3 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき、方程式

$$\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$$

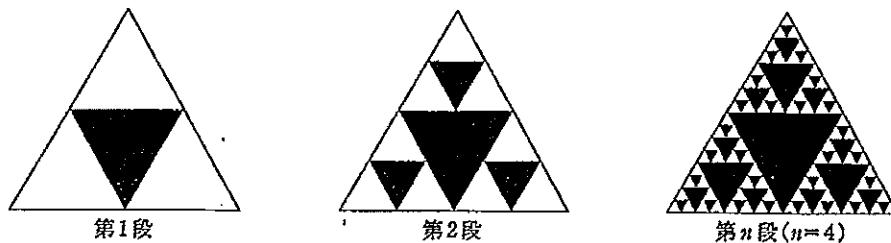
を満たす解は $\theta = \boxed{9}^\circ, \boxed{10}^\circ$ である。

問 4 実数 x, y は不等式

$$4 \leq |x| + |y| \leq 6$$

を満たす。このとき $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ の最大値は $\boxed{11}$, 最小値は $\boxed{12}$ である。

2 下図のように一辺の長さが 1 の白い正三角形の各辺の中点を線分で結び、中央にできた正三角形を黒く塗る(図の第1段)。この操作を第1段とする。第1段の操作では、白い正三角形が 3 個、黒い正三角形が 1 個できる。次に、3 個の白い正三角形全てについて各辺の中点を線分で結び、第1段と同様に、中央にできた正三角形を黒く塗る(図の第2段)。この操作を第2段とする。第2段までの操作で、白い正三角形が 9 個、黒い正三角形が 4 個できる。第 n 段($n \geq 3$)の操作として、第 $n-1$ 段までにできた白い正三角形全てについて、各辺の中点を結ぶことにより黒い正三角形を描く。図の第 n 段は $n=4$ の場合を表す。以下の各問に答えなさい。



問 1 第 n 段($n \geq 1$)までの操作ができる白い正三角形の個数を a_n とし、黒い正三角形の個数を b_n とする(例: $a_2 = 9$, $b_2 = 4$)。このとき、

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}} - \frac{\boxed{16}}{\boxed{17}} \left(\boxed{18} \right)^n$$

である。

問 2 第 n 段($n \geq 1$)までの操作ができる白い正三角形の辺の長さの和を l_n とし、黒い正三角形の辺の長さの和を m_n とする(例: $l_1 = \frac{9}{2}$, $m_1 = \frac{3}{2}$)。このとき、

$$\frac{m_n}{l_n} = \frac{\left(\boxed{19} \right)^n - \left(\boxed{20} \right)^n}{\left(\boxed{21} \right)^n}$$

である。

3 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ で定義された関数

$$f(x) = \tan^4 x - \tan^2 x$$

について以下の各間に答えなさい。

問 1 $f(x)$ の極小値における $\tan x$ の値は $\frac{\sqrt{22}}{23}$ である。

問 2 $f(x)$ の変曲点における $\tan x$ の値は $\frac{\sqrt{24}}{25}$ である。

問 3 $f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{26}{27} - \frac{28}{29}\pi$ である。

4

正12角形から無作為に3個の頂点を選び、三角形を作る。以下の確率を求めなさい。

問 1 直角三角形のできる確率は $\frac{30}{31 \ 32}$ である。

問 2 二等辺三角形(正三角形も含む)のできる確率は $\frac{33 \ 34}{35 \ 36}$ である。

問 3 正12角形と辺を共有しない三角形のできる確率は $\frac{37 \ 38}{39 \ 40}$ である。