平成20年度入学試験問題

数　　学

注　意

1. 問題冊子は，指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は6ページ，解答紙は3枚である。
「始め」の合図があったら，それぞれページ数および枚数を確認すること。
3. 「始め」の合図があったら，すべての解答紙それぞれ2ケ所に受験番号を記入すること。
4. 解答は，黒色鉛筆（シャープペンシルも可）を使用し，すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。
5. 試験終了後，監督者の指示に従って，解答紙の順番をそろえること。
6. 下書き等は，問題冊子の余白を利用すること。
7. 解答紙は持ち帰らないこと。

$\boxed{1}$

空欄にあてはまる適切な数，式，記号を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 次の式

$$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta$$

は sin を使った最も簡単な式で表すと $\boxed{\text{ア}}$ となるので，

$$\cos 20^\circ\ \cos 40^\circ\ \cos 80^\circ\ \cos 160^\circ\ \cos 320^\circ\ \cos 640^\circ$$

の値は $\boxed{\text{イ}}$ であることがわかる。

(2) $2^{10} < \left(\frac{5}{2}\right)^n < 2^{50}$ を満たす自然数 n は $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。また，$2^{50} < 2^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n < 2^{100}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{エ}}$ で最大の自然数 n は $\boxed{\text{オ}}$ である。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。

(3) 方程式 $x(x+3)^2 - y = 0$ の表す曲線を C_0 とする。

1　曲線 C_0 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる曲線 C_1 の方程式は $\boxed{\text{カ}}$ である。

2　原点に関して曲線 C_0 と対称な曲線を C_2 とする。2 つの曲線 C_1 と C_2 の交点の座標は，x 座標が小さい順に，($\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$)と($\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$)である。また，2 つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{サ}}$ である。

3　この図形と同じ面積を持ち，$x \geqq 0$，$y > 0$ の領域で，2 つの曲線 C_1 と C_2 の交点を通る直線と y 軸に接する円の中心の座標は($\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$)である。

2

1からnまでの自然数が書かれたn枚のカードが箱に入っている。この箱からカードを1枚ずつ無作為にn枚すべて取り出す。i $(1 \leqq i \leqq n)$枚目に取り出したカードに書かれた自然数をN_iとする。いま，すべての自然数iで$N_i \neq i$であるようなカードの選び方の総数をa_n，$N_i = i$であるiの個数をXとする。次の問いに答えなさい。

(1) $n \geqq 3$のとき，a_nとa_{n-1}とa_{n-2}の間に成り立つ関係式を求めなさい。

(2) $k = 0, 1, \ldots, n$に対して，$X = k$となる確率を求めなさい。

(3) 確率変数XおよびX^2の期待値をそれぞれ求めなさい。

3

Dを半径1の円盤，Cをxy平面上の$|x|+|y|=1$を満たす点$(x,\ y)$からなる図形とする。Dがxyz空間内を動くとき，Dの中心がC上にあり，かつDを含む平面は常にy軸と直交するように動くものとする。Dが通過する部分からなる立体をVとする。次の問いに答えなさい。

(1)　$0 \leqq t \leqq 1$に対して，余弦が$1-t$になる角度を$\theta(t)$（$0 \leqq \theta(t) \leqq \frac{1}{2}\pi$）で表す。すなわち，$\cos\theta(t)=1-t$である。このとき，$\displaystyle\int_0^1 \theta(t)\,dt$の値を求めなさい。

(2)　立体Vを平面$y=t$（$0 \leqq t \leqq 1$）で切ったとき，断面積をtと(1)で定義した関数$\theta(t)$を使って表しなさい。

(3)　立体Vの体積を求めなさい。