数　学

（その1）

1 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の数列は，分母が2のべき乗で分子が奇数の分数（<1）を並べたものである。

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \cdots$$

(1-1) この数列の第100項を求めよ。

(1-2) この数列の初項から第100項までの和を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ とする。次の連立不等式を解け。

$$0 \leqq 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\cos x \leqq 1$$

(3) x の方程式 $\log_a(x-1)+\log_a(4-x)=-2$ が解をもつような実数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) x の方程式 $x\sqrt{x}-m\sqrt{x}+1=0$ が相異なる2つの実数解をもつための，実数 m のとりうる値の範囲を求めよ。

(5) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n=\sqrt[n]{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+2\cdot\frac{n}{n}\right)}$$

とおく。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

◇M1(770—9)

$\boxed{2}$ 実数aは不等式$0 \leqq a \leqq 1$を満たすものとする。また，実数tに対し，放物線$y=-x^2+1$上の点$(t, -t^2+1)$における接線をlとし，点$(a, 0)$からlまでの距離をdとする。

(1) dを求めよ。

(2) $d=f(t)$とおく。tがすべての実数を変わるとき，関数$f(t)$の導関数$f'(t)$を求めよ。

(3) tがすべての実数を変わるとき，関数$f(t)$が極大となるtの値の個数，および極小となるtの値の個数をそれぞれ求めよ。

◇M1(770—10)

数　学

(その2)

3　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\sqrt{7}+12$ の整数部分を x，小数部分を y とする。$x-\dfrac{3}{y}$ の整数部分の値を求めよ。

(2) 72^n（n は自然数）の正の約数の個数がちょうど $13n+111$ に等しいとする。n の値を求めよ。

(3) 半径 r の 4 個の小球が互に外接している。次の各問に答えよ。

(3-1) 各小球の中心を 4 つの頂点とする正三角錐の体積を求めよ。

(3-2) 4 個の小球が内接する球の半径を求めよ。

(4) $\triangle$ABCの頂点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。また，辺BC，CA，ABをそれぞれ $m:n$ に内分する点をP，Q，Rとする。ただし，m，n は正の数とする。次の各問に答えよ。

(4-1) 点Pの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4-2) $\triangle$PQRの重心をGとする。点Gの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

4 次の『』の中の文章を読み，以下の問（1）～（5）に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『下図のように，4 つの水路①～④で結ばれた 4 つの池 A～D がある。池の高さの違いにより，池 A の水は水路①を経て池 B に流れ込み，続いて 2 つの水路②および④を経て流れる。水路②を通った水は池 C に流れ込み，さらに水路③を経て池 D に到達する。また，水路④を通った水は池 D に直接流れ込む。なお水量が十分にあるとき，各池に流れ込んだ水は下流に流れてもその一部は池に残る。

4 つの水路にはそれぞれ途中に水門があり，水門が閉じているとき水は下流に流れない。各水門の開閉は互いに独立に定まり，水路①～④の各水門が開いている確率はそれぞれ p_1 ～ p_4 （いずれも 0 以上 1 以下の実数）である。

今，4 つの池に水が無いことを確認した後，池 A に十分な量の水を注ぎ込むとする。』

（1） 水が池 C に流れ込む確率を求めよ。

（2） 水が池 D に流れ込む確率を求めよ。

（3） $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。次の各条件付確率を求めよ。

（3-1） 池 D に水が到達しているとき，池 C に水が流れ込んでいる確率。

（3-2） 池 D に水が到達していないとき，池 C に水が流れ込んでいる確率。

（4） $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。水路②か水路④のどちらか一方のみを通って水が池 D に到達する確率を求めよ。

（5） （4）の確率が最大となる p の値を求めよ。