数　学

（その 1）

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 円 $x^2+(y-2)^2=1$ に外接し，かつ x 軸に接する円 C がある。

(1-1) 円 C の中心の軌跡の方程式を求めよ。

(1-2) 円 C がさらに直線 $x=5$ に接しているとき，C の中心の座標を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$$S_n=2a_n+2^n-1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。

(2-1) a_{n+1} と a_n の間の関係式を求めよ。

(2-2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 次の各問に答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ としてよい。

(3-1) $2^{50}+3^{50}$ は何桁の整数か。

(3-2) 2^n+3^n が 100 桁の整数になるような自然数 n のうちで最大のものを求めよ。

(4) θ は $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ を満たす実数とする。x の方程式

$$(1+2\cos\theta)x^2-2(1+2\sqrt{3}\sin\theta)x+(1+2\cos\theta)=0$$

が実数解をもつような θ の範囲を求めよ。

(5) 次の各問に答えよ。

(5-1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を t の式で表せ。

(5-2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

◇M1 (051—10)

$\boxed{2}$ a は $1 \leqq a \leqq e$ を満たす実数とする。xy 平面において次の連立不等式

$$1 \leqq x \leqq e, \quad (y - \log a)(y - \log x) \leqq 0$$

で表される領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする。ただし，log は自然対数，e はその底を表す。

(1) $V(a)$ を求めよ。

(2) $V(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

◇M1(051—11)

数　学

（その 2）

3 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 一の位が 6 である 2 桁の正の整数がある。この整数を 3 乗した数から 2 乗した数を引くと，差の値は100で割り切れるという。この条件を満たす整数をすべて求めよ。

(2) 救急当番の班編成を行うために，病院の 9 人の医師を，3 人からなる班が 1 つ，および 2 人からなる班が 3 つの合計 4 班に振り分けたい。何通りの分け方があるか。その総数を求めよ。

(3) 半径 5 の円，および円周上の点Cにおける接線 l がある。点PはCと異なる l 上の点であり，点Pを通る直線が円と 2 点A，Bで交わっていて，PA=3，PB=8 である。円の中心をOとするとき，線分OPの長さを求めよ。

(4) a，k を実数とする。放物線 $y=-x^2+2ax-k$ を y 軸方向に k^2 だけ平行移動した放物線が実数 k の値にかかわらず x 軸と異なる 2 点で交わるとき，実数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(5) △ABCの頂点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。また辺BC，CA，ABの長さをそれぞれ l，m，n とする。∠Aの二等分線が辺BCと交わる点をDとするとき，次の問に答えよ。

(5-1) 点Dの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(5-2) △ABCの内心Iの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

4 はじめにＡの『』内の文章を読んで問 (1)，(2) に答えよ。次にＢの『』内の文章を読んで問 (3) 〜 (5) に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

Ａ:『均質な新品の電球が多数ある。この電球を一つ取り出し，点灯後毎日観察する。このとき，1 日後に切れている確率は p_1，1 日後は灯っているが 2 日後には切れている確率は p_2，同様に $i-1$ 日後の時点では灯っているが i 日後には切れている確率は p_i である。ただし，i は 1 以上の整数であり，p_i は $0 \leqq p_i \leqq 1$ を満たす実数である。なお，ある定まった正の整数 k が存在していて，どの電球も点灯後 k 日後には必ず切れている。』

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i$ の値を求めよ。

(2) この電球を点灯してから切れるまでの日数の平均を求めよ。なお「切れるまでの日数」とは，点灯後毎日観察して，初めて切れていることが観察された時点の経過日数（正の整数）のこととする。

Ｂ:『この電球をいくつか任意に取り出して点灯し，1 日後に観察を行い，切れている電球があればそれを新品と交換して新しい電球を直ちに点灯する。この交換と点灯は瞬時に行われ，時間経過は無視できる。その後同様の操作を毎日継続する。』

(3) $k > 3$ であり，$p_1 = 0.5$，$p_2 = 0.2$，$p_3 = 0.175$ であるとする。電球を一つ取り出して上記の操作を行うとき，次の確率を求めよ。

(3-1) 最初に点灯してから 2 日後に電球を交換する確率。

(3-2) 最初に点灯してから 3 日後に電球を交換する確率。

(4) k および p_1，p_2，p_3 は (3) と同じとする。この電球を 5 個取り出して上記の操作を行うとき，3 日後に電球を 3 個交換する確率を求めよ。

(5) $k = 2$ であり，$p_1 = p$（p は $0 \leqq p < 1$ を満たす実数）であるとする。電球を一つ取り出して上記の操作を行うとき，最初に点灯してから n 日後に電球を交換する確率を x_n とする。次の問に答えよ。

(5-1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ。

(5-2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を調べよ。

◇M1(051—13)