平成 20 年度入学試験問題

（Ｉ期）

数　学

（その1）

注意事項

1. 解答は解答用紙の所定の欄に記入せよ。
2. この問題用紙および下書き用紙は解答用紙と共に机上に残すこと。

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) ある実数aにより3辺の長さがそれぞれ$2a-1$，a^2-2a，a^2-a+1と表される三角形がある。

(1-1) この3辺の長さのうち最大のものを求めよ。

(1-2) この三角形の3つの内角のうち最大の角の大きさを求めよ。

(2) 3次方程式 $x^3+ax^2+ax+1=0$ が2重解をもつような定数aの値を求めよ。なお，3重解は2重解とはみなさないものとする。

(3) 次の等式を満たす関数$f(x)$と定数aの値を求めよ。

$$\int_a^{2-x} f(t)dt = x^2$$

(4) 次の関数$f(x)$がすべての実数で連続となるように定数a，bを定めよ。ただし，bについては，とりうる値のうち正の数で最小のものを求めよ。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+ax+2\cos bx+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{7}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}$ を求めよ。

2 多項式の列 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ があり，次の関係式（i），（ii）を満たしているとする。また，$a_n=f_n(0)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とおく。とくに $a_0=1$ である。以下の各問に答えよ。

（i） $f_0(x)=1$,

（ii） $f_n{}'(x)=nf_{n-1}(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(1) $f_n(x)=n\int_0^x f_{n-1}(t)dt+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ について，等式

$$f_n(x)={}_nC_0x^n+{}_nC_1a_1x^{n-1}+\cdots+{}_nC_{n-1}a_{n-1}x+{}_nC_na_n$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) 多項式の列 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は上の関係式（i），（ii）の他に，次の関係式（iii）も満たしているとする。

（iii） $\int_0^1 f_n(x)dx=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$

このとき

$$a_n=n\int_0^1 xf_{n-1}(x)dx \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立つことを証明せよ。

◇M1(050—12)

数　学

（その２）

注　意　事　項

1. 解答は解答用紙の所定の欄に記入せよ。
2. この問題用紙および下書き用紙は解答用紙と共に机上に残すこと。

$\boxed{3}$ xy 平面上に２つの円 A，B がある。A は方程式 $x^2+y^2=r^2$（ただし，r は正の定数）で表されるものとする。B は，中心の座標が (a,b)，半径が c（c は正の定数）であり，A と共有点をもつことなく，A の内部に含まれているものとする。次に，円 A 上の $y \geqq 0$ を満たす部分から任意に点をとり，それを P とする。また円 A の P における法線を l とする。以下の問（1）～（4）に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) a，b，c，r が満たすべき条件を不等式で表せ。

(2) 法線 l が円 B の中心を通るとき，点 P の座標を a，b，r を用いて表せ。ただし，$(a,b) \neq (0,0)$ とする。

(3) 円 B に接するような法線 l がただ１本だけ存在するのは，B がどのような条件を満たす場合か。

(4) $a=b=\sqrt{10}$，$c=2$ とする。このとき，円 B と法線 l が共有点をもつような点 P の x 座標の範囲を求めよ。

次に，円 A を構成する各点の x 座標を２倍にした点全体で構成される図形を A' とする。A の場合と同様に，A' 上の $y \geqq 0$ を満たす部分からとった任意の点を P′，図形 A' の P′ における法線を l' とする。以下の問（5），（6）に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(5) 図形 A' を表す方程式を書け。また，点 P′ の座標を (x_1, y_1) とするとき，法線 l' の方程式を書け。

(6) 円 B の中心が $(0,0)$ にあり，点 $\mathrm{P}'(\sqrt{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ における A' の法線 l' が B と接しているとする。このとき，B の半径 c の値を求めよ。

4 文字A，C，G，Tのいずれか1つだけが書かれた4種類の札が何枚かある。いまその中から何枚かの札を取り出して，左から順に一列に並べることを考える。

4種類の札がそれぞれ1枚ずつあるとし，これから3枚を取り出して並べるとする。次の問（1），（2）に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(2)「札Aが札Cの左にある」という事象をⅠ，「札Tが並びの中に含まれる」という事象をⅡで表す。

　(2-1) 事象Ⅱが起こったときの事象Ⅰが起こる条件つき確率を求めよ。

　(2-2) 事象Ⅰと事象Ⅱは独立か否か。理由を述べて答えよ。

次に，札Aと札Gが3枚ずつ，札Cが2枚，札Tが1枚の合計9枚の札があるとし，この9枚を全部並べるとする。次の問（3），（4）に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(3) 全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(4) 並べた9枚の札を，左から1～3番目，4～6番目，7～9番目の3箇所に区切る。この3箇所の各3枚の並べ方がいずれも（1）で現れる並べ方のどれかに該当するような9枚の並べ方は全部で何通りあるか。その総数を求めよ。また，そのような9枚の並べ方が現れる確率を求めよ。