平成 20 年　東海大学
入学試験問題

数　　　学

（医　学　部）

— 2月6日 —

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

1 (1) $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) 方程式 $\log_2 \sqrt[3]{x}-\log_4 4x^3+8=0$ の解は，$x=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ のとき，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x}$ とする．$t=\sin x$ とおくと，$f'(x)$ は t の式として表され，$\boxed{\text{オ}}$ となる．

(5) 右図のように自然数を配置したとき，1 の右に並んでいる数の列を $\{a_n\}$ とする．たとえば，初めの 3 項は，$a_1=2$，$a_2=11$，$a_3=28$ である．

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49

(i) $a_n=\boxed{\text{カ}}$ である．

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\boxed{\text{キ}}$ である．

2 (1) 自然数 m の正の約数の総和を $S(m)$ で表す．たとえば，$S(10)=1+2+5+10=18$ である．

(i) p を素数，n を自然数とすると，$S(p^n)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{p-1}$ となる．

(ii) 自然数 a，b の最大公約数が 1 のとき，$S(ab)$ は $S(a)$ と $S(b)$ を用いて表され $S(ab)=\boxed{\text{イ}}$ となる．

(iii) n を自然数とし，$2^{n+1}-1$ が素数のとき，$m=2^n(2^{n+1}-1)$ とおく．$S(m)$ を m を用いて表すと $S(m)=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(iv) i，j を自然数とするとき，$m=2^i\,3^j\,5$ の形をしていて，$S(m)=3m$ となる最小の m は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ．m，n は自然数で，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(m,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ n)$ とする．次のように L，M，N を定める．

- $L=\triangle\mathrm{OAB}$ の内部にある格子点の個数
- $M=\triangle\mathrm{OAB}$ の内部または周上にある格子点の個数
- $N=$ 辺 AB 上にある格子点の個数，ただし点 A，B は除く

このとき，m，n を用いて表すと

(i) $2L+N=\boxed{\text{オ}}$ である．

(ii) $2M-N=\boxed{\text{カ}}$ である．

(iii) ゆえに，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は L，M を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表せる．

3 (1) 次の定積分を計算し，因数分解した形で表しなさい．ただし，a，bは定数とする．

(i) $\int_0^a x(x-a)(x-b)dx =$ [ア]

(ii) $\int_a^b x(x-a)(x-b)dx =$ [イ]

(2) 関数$y=f(x)=x^3-3x^2-3x$のグラフをGとする．グラフG上の2点$(0,\ 0)$と$(4,\ 4)$を通る直線はGともう1つの点([ウ], [エ])で交わる．Gとこの直線で囲まれる図形は図1のように2つできる．これら2つの図形のうち面積が大きい方の図形の面積は [オ] である．

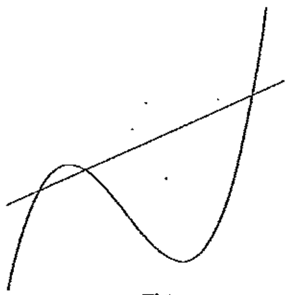

図1

(3) 一般にグラフG上の点$(0,\ 0)$と点$(a,\ f(a))$ $(a>0)$を通る直線LとGで囲まれる図形は1つまたは2つできる．そのうち面積が大きい方（小さくない方）の面積を$S(a)$と書く．ただし，GとLで囲まれる図形が1つのときは，その図形の面積を$S(a)$と書く．たとえば$S(4)=$ [オ] である．

(i) Lが$(0,\ 0)$におけるGの接線になっているとき，図2のようにGとLで囲まれた図形は1つの図形からなる．このとき$a=$ [カ] かつS([カ])$=$ [キ] である．

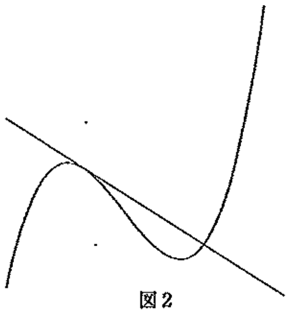

図2

(ii) $0<a<\frac{3}{2}$における$S(a)$の最小値は [ク] である．