

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) 半径 r の円に内接する四角形 ABCD が

$$AB = \frac{CD}{3}, \quad AB^2 = \frac{BC}{2} = \frac{DA}{4}, \quad \cos \angle BAD = -\frac{1}{2}$$

をみたしている。このとき、 $AB = \text{ (ア) }$ 、 $r = \text{ (イ) }$ である。

(2) 袋の中に $n-3$ 個 ($n \geq 8$) の赤玉と 3 個の白玉が入っている。この袋から 7 個の玉を同時に取り出すとき、赤玉が 5 個となる確率 P_n を n を用いて表すと、 $P_n = \text{ (ウ) }$ である。また、 P_n を最大にする n を求めると $n = \text{ (エ) }$ である。

(3) 整数を成分とする 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ($b \neq 0$) がある。

$$AP = P \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \dots\dots \text{①}$$

をみたすような 2 次の正方行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix}$ を求めると、 $x = \text{ (オ) }$ 、 $y = \text{ (カ) }$ である。さらに、① を用いると

$$A^4 - 6A^3 + 9A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

をみたす整数 a, b の組 (a, b) は $(a, b) = \text{ (キ) }$ または $(a, b) = \text{ (ク) }$ であることが分かる。

2. 実数全体で定義された次の関数 $f(x)$, $g(x)$ を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (x \geq 0) \\ 1 - 2^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ の範囲において、関数 $h(x)$ を $h(x) = (x^2 + 1)(f(x) - g(x))$ により定める。
 - (i) $h(0)$, $h(1)$ の値を求めよ。
 - (ii) $x > 0$ のとき $h''(x)$ の符号を調べよ。
 - (iii) 平均値の定理を用いて $h'(c) = 0$, $0 < c < 1$ をみたす実数 c が存在することを示せ。また、それはただ1つであることの理由を述べよ。
- (2) $f(x)$ と $g(x)$ の大小を調べよ。
- (3) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

3. θ を $0 < \theta < \pi$ の範囲にある定数とし、 xy 平面上に原点 O と異なる定点 $P_0(x_0, y_0)$ をとる。 O を中心として、点 P_0 を正の向きに角 θ (ラジアン) 回転した点と O を結ぶ線分の中点を $P_1(x_1, y_1)$ とする。次に、 O を中心として、点 P_1 を正の向きに角 θ 回転した点と O を結ぶ線分の中点を $P_2(x_2, y_2)$ とする。以下、同様にくりかえして、点 $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を定める。

このとき、次の問いに答えよ。とくに、問い (1) では にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

- (1) x_n と y_n をそれぞれ x_0, y_0, θ および n を用いて表せば、 $x_n = \text{ (ケ)}$,
 $y_n = \text{ (コ)}$ である。
- (2) $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の面積を S_n とするとき、無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ の和を x_0, y_0, θ を用いて表せ。
- (3) 点 P_0 の座標を $(x_0, y_0) = (1, 0)$ とする。2つのベクトル $\overrightarrow{P_0 P_1}$ と $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ が平行になるような正の整数 n が存在するための必要十分条件は、 $\frac{\theta}{\pi}$ が有理数となることである。このことを示せ。

受験番号

名前

数字は右つめて明瞭に書き空欄には0を記入する 例：0477 悪い例：6477

数学 解答用紙

※枠内に記入しないこと

1. 解答欄

(1)		(2)	
(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
(3)			
(オ)	(カ)	(キ)	(ク)

2. (問題3の解答はこの裏面に記せ.)

この線より上には解答を記入してはならない。

3.

(1)	
(ケ)	(コ)