数　　学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) △ABCは，三辺AB，BC，CAの長さがこの順に4，6，5であり，点Dは辺BCを1：2に内分している。

辺ABの延長上に点Pをとり，PDの延長と辺ACとの交点をQとするとき，線分DQの長さが $\sqrt{11}$ であった。このとき，$\cos C = \boxed{(ア)}$ であり，線分CQの長さは $\boxed{(イ)}$ である。線分比を考えることにより，線分BPの長さは $\boxed{(ウ)}$ であることが分かる。

(2) n は正整数とする。確率変数 X は0から n までの整数値を値にとり，$X=k$ となる確率 p_k のつくる数列 p_0，p_1，…，p_n は，初項 p_0，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるという。

とくに $n=2$ の場合は，$p_0 = \boxed{(エ)}$ であり，さらに X の期待値は $E(X) = \boxed{(オ)}$ である。一般の場合は，n を用いて $p_0 = \dfrac{\boxed{(カ)}}{2^{n+1}-1}$ と表わされ，$E(X) = \dfrac{\boxed{(キ)}}{2^{n+1}-1}$ である。

(3) $\tan\frac{5\pi}{12}$ の値を求め，分母を有理化して簡単に表せば，$\tan\frac{5\pi}{12} = \boxed{(ク)}$ である。このことから，定積分 $I = \int_0^{2(2+\sqrt{3})} \frac{16}{(x^2+4)^2}\,dx$ の値は，$I = \boxed{(ケ)}$ であることが分かる。

2. 以下の設問(A)の(1)および(B)の(1), (2), (3)に答えよ。ただし，(A)と(B)は独立した問題である。(A)に答えられなくても(B)に答えてよい。

(A) 与えられた行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし $ad-bc \neq 0$)に対して，分数関数

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ が定まる。

(1) ふたつの行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし $ad-bc \neq 0$), $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ (ただし $ps-qr \neq 0$)

で定まる分数関数をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とする。

また，ふたつの行列の積を

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とするとき，$a'd'-b'c'=(ad-bc)(ps-qr) \neq 0$ であることが分かっている。

次の命題が成り立つことを証明せよ。

$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ で定まる分数関数は，合成関数 $f(g(x))$ である。

(B) 漸化式

$$x_{n+1}=\frac{2x_n+3}{x_n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots①$$

と，初項 $x_1=1$ で与えられた数列 $\{x_n\}$ の第 $n+1$ 項 x_{n+1} を n を用いて表したい。

行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。

(1) 漸化式①で与えられた数列 $\{x_n\}$ について，

$$x_{n+1}=\frac{a_nx_1+b_n}{c_nx_1+d_n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

(2) $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$P^{-1}AP$ を求め，さらに A^n を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ の第 $n+1$ 項 x_{n+1} $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を n を用いて表せ。

3. 関数$f(x)$は実数全体で定義されている。

$f(x)$が次の条件①および②をみたすとき，$f(x)$を求めたい。

条件①：すべての実数x，yについて，$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$が成り立つ。

条件②：微分可能な関数である。

すなわち，すべての実数aについて微分係数$f'(a)$が定まる。

以下の設問(A)および(B)の(1)，(2)，(3)，(4)に答えよ。(A)で述べられた結果は(B)で用いてよい。

(A) 関数$f(x)$が条件①をみたすとき，次の命題(A.1)，(A.2)が成り立つことを証明せよ。必要ならば $0=a+(-a)$ であることを用いよ。

(A.1) ある実数aについて$f(a)=0$ならば，すべての実数xについて$f(x)=0$である。

(A.2) すべての実数aについて$f(a)\neq 0$ならば，$f(0)=1$である。

(B) 関数$f(x)$が条件①および②をみたし，かつ0を値にとらないとする。

(1) すべての実数xについて$f(x)>0$であることを，背理法によって証明せよ。必要ならば「微分可能な関数は連続である」ことを用いよ。

(2) $x=a$における微分係数$f'(a)$の定義の式を記せ。

(3) すべての実数xについて

$$f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$$

であることを示せ。

(4) $f'(0)=k$とする。不定積分$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$を考えることにより$f(x)$を求め，$k$を用いて表せ。