数　　　学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) n を3以上の整数とする。

1から n までの数字がひとつずつ書かれた，合計 n 個の球が袋の中にある。無作為に3個の球をとり出し，書かれている数を小さい順に並べたときの中央の値を X とする。X は確率変数である。

X が値 k をとる確率を求めると，$P(X=k)=\boxed{(ア)}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である。さらに，X の平均(期待値)を求めると，$E(X)=\boxed{(イ)}$ である。

(2) 原点をOとする空間に2点 $\mathrm{P}(s,\ s,\ s+2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t+2,\ -t-1)$ (s, t は実数)がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直であるのは

$$s=\boxed{(ウ)}\quad \text{または}\ t=\boxed{(エ)}$$

のときである。s の値が(ウ)のときの点Pを $\mathrm{P_0}$ とし，t の値が(エ), 1のときの点Qをそれぞれ $\mathrm{Q_0}$, $\mathrm{Q_1}$ とする。このとき，三角形 $\mathrm{OQ_0Q_1}$ の面積は $\boxed{(オ)}$ であり，四面体 $\mathrm{OP_0Q_0Q_1}$ の体積は $\boxed{(カ)}$ である。

(3) 変数 x, y の整式

$$p=x^2+xy+y^2,\qquad q=x^2y+xy^2$$

がある。このとき，整式

$$D=\{(x-y)(x+2y)(2x+y)\}^2$$

は整数を係数とする p, q の整式で表せる。これを求めるために，$r=xy$ として，まず D を p と r の整式で表せば $D=\boxed{(キ)}$ である。これより，D は p と q の整式として $D=\boxed{(ク)}$ のように表すことができる。

(4) 座標平面上に極方程式で与えられた曲線 $C: r=3e^{2\theta}$ $(\theta\geqq 0)$ がある。n を与えられた正の整数，$\theta=0$, $\theta=2n\pi$ における曲線上の点を順にA，Pとし，Pにおけるこの曲線の接線を l, l と直線 $x=3$ との交点をQとする。

このとき，接線 l の傾きは $\boxed{(ケ)}$ であり，線分PQの長さは $\boxed{(コ)}$ である。一方，点AからPまでのこの曲線の長さは $\boxed{(サ)}$ である。

2.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=a, \qquad \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=b$$

とする。a と b の値を求めたい。以下の設問(1), (2), (3)に答えよ。

(1) 角 θ(ラジアン)が

$$\cos 3\theta=\cos 4\theta \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

をみたすとき，解のひとつが $\cos\theta$ であるような4次の方程式を求めよ。

(2) $\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ のとき，$\cos\theta$ が解のひとつであるような3次の方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の結果を用いて，a および b の値を求めよ。

3. 関数$f(x)$は

$$f(x)=\int_0^1 \frac{2}{|2t-x|+3}\,dt$$

によって定められている。この関数を

$$0 \leqq x \leqq 4 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の範囲で考える。以下の設問に答えよ。

(1) 定積分を計算して，①の範囲における$f(x)$を求めよ。

(2) 増減，極値を調べて，①の範囲における$f(x)$の最大値と最小値を求めよ。